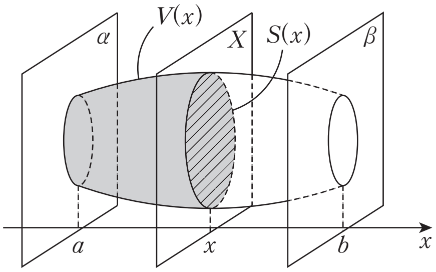
第21講 体積
PART1 定積分と体積

要点整理と公式

要点① 定積分と体積

ある立体の，x 軸に垂直な 2 平面 α，β に挟まれた部分の体積 V を求める。

　右図のように，2 平面 α，β が x 軸と交わる点の座標をそれぞれ a，b $(a<b)$とする。また，x 軸に垂直で，x 軸と座標 x で交わる平面 X で立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とし，2 平面 α，X の間に挟まれた部分の体積を $V(x)$ とする。



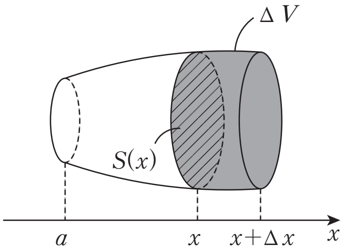
　x の増分 Δx に対する $V(x)$ の増分を ΔV とすると

$$\Delta V = V(x+\Delta x) - V(x)$$

であり，ΔV は x 軸と座標 x，$x+\Delta x$ で交わる 2 平面の間に挟まれた部分の体積に等しい。

　ここで，Δx が十分小さいとき

$$\Delta V \fallingdotseq \qquad \times$$



すなわち $\dfrac{\Delta V}{\Delta x} \fallingdotseq S(x)$ であり，$\Delta x \to 0$ のとき

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = S(x) \text{ つまり } \qquad = S(x)$$

である。したがって

$$\int_a^b S(x)dx = \Big[\qquad \Big]_a^b = V(b) - V(a) = V$$

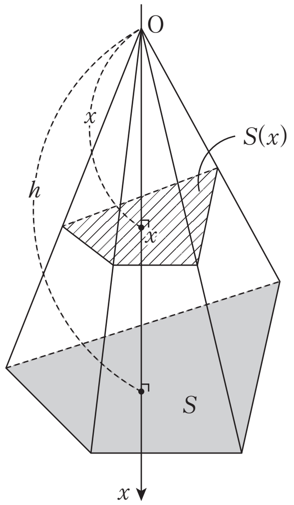
が成り立つ。以上より，次の公式が成り立つ。

定積分と体積

x 軸に垂直で x 軸と座標 a，b で交わる平面をそれぞれ α，β とし，x 軸に垂直で x 軸と座標 $x(a \leqq x \leqq b)$ で交わる平面 X である立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とするとき，2 平面 α，β に挟まれた部分の体積 V は

$$V=\int_a^b S(x)dx \qquad (a<b)$$

(ex) 底面積が S，高さが h の角錐の体積は，$V=\dfrac{1}{3}Sh$ で表されることを示せ。



角錐の頂点 O を原点とし，O から底面に下ろした垂線を x 軸とする。x 軸に垂直で，x 軸と座標 x で交わる平面でこの角錐を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。

断面の多角形と底面の多角形は相似であり，その相似比は　：　であるから，面積比は

$$S(x) : S = \quad : \quad$$

よって　$S(x)=\dfrac{S}{h^2}x^2$

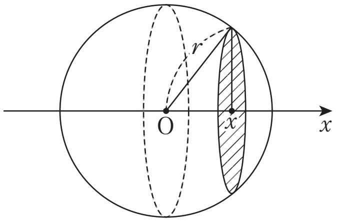
したがって，角錐の体積は

$$V=\int \qquad dx=\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx=\frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{1}{3}Sh$$

1 半径 r の球の中心Oを原点として，x 軸をとる。

(1) x 軸に垂直で，x 軸と座標 x で交わる平面でこの球を切ったときの断面は円である。この円の半径を r と x を用いて表せ。

(2) (1)の結果を用いて，この球の体積 V が $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ で表されることを示せ。

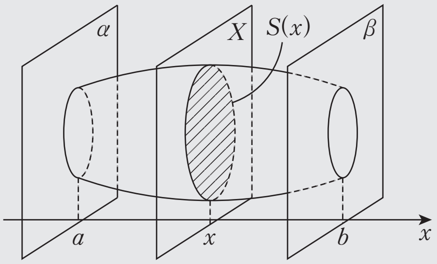


Point Pickup

定積分と体積

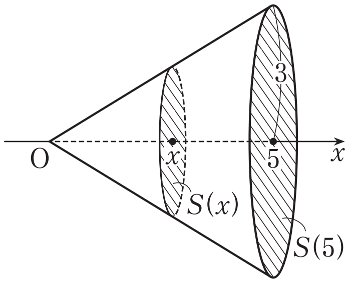
x 軸に垂直で x 軸と座標 a，b で交わる平面をそれぞれ α，β とし，x 軸に垂直で x 軸と座標 x で交わる平面 X である立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とするとき，2平面 α，β に挟まれた部分の体積 V は

$$V=\int_a^b S(x)dx \qquad (a<b)$$



第21講 PART1 確認問題

1 底面の半径が 3，高さが 5 である円錐の体積 V を，定積分を用いて求める。



円錐の頂点を原点 O とし，頂点から底面に下ろした垂線を x 軸とする。

$0 \leqq x \leqq 5$ として，x 軸に垂直で，x 軸との交点の座標が x である平面でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると，

$$S(x) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}\pi x^2$$

よって，求める体積 V は，

$$V = \int_0^{\boxed{\text{エ}}} S(x)dx = \boxed{\text{オカ}}\,\pi$$

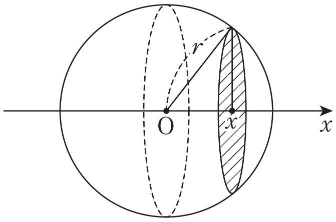
第21講　体積

PART1　定積分と体積

1　半径 r の球の中心Oを原点として，x 軸をとる。

(1)　x 軸に垂直で，x 軸と座標 x で交わる平面でこの球を切ったときの断面は円である。この円の半径を r と x を用いて表せ。

(2)　(1)の結果を用いて，この球の体積 V が $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ で表されることを示せ。



[解答]

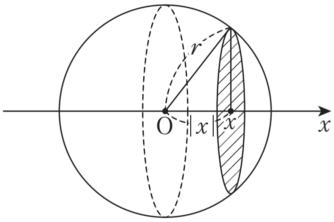
(1)　三平方の定理より，求める断面の円の半径は

$$\sqrt{r^2-x^2}$$

(2)　断面の円の面積 $S(x)$ は

$$S(x)=\pi(r^2-x^2)$$

よって



$$V=\int_{-r}^{r}S(x)dx=\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)dx=2\pi\int_{0}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

第21講 PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：9，イウ：25，エ：5，オカ：15

[解説]

断面の円と底面の円は相似であり，相似比は

$x:5$ であるから，

$$S(x):S(5)=x^2:5^2$$

$S(5)=\pi\cdot3^2=9\pi$ であるから，

$$\boldsymbol{S(x)=\frac{9}{25}\pi x^2}$$

よって，

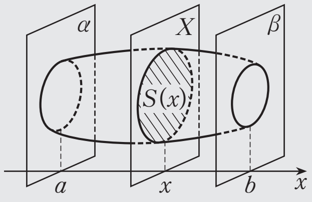
$$V=\int_0^5 S(x)dx \quad \text{[A]}$$

$$=\int_0^5 \frac{9}{25}\pi x^2\,dx$$

$$=\left[\frac{3}{25}\pi x^3\right]_0^5$$

$$=\frac{3}{25}\pi\cdot5^3=\boldsymbol{15\pi}$$

[A]　定積分と体積

x 軸に垂直で x 軸と座標 a，b で交わる平面をそれぞれ α，β とし，x 軸に垂直で x 軸と座標 x で交わる平面 X である立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とするとき，2 平面 α，β に挟まれた部分の体積 V は，

$$V=\int_a^b S(x)dx \ (a<b)$$